Capelli恒等式の有限群論への応用 (リー型の組合せ論)

山口, 尚哉

数理解析研究所講究録
第2039巻 2017年 167-173

Capelli 恒等式の有限群論への応用

九州大学大学院数理学府 山口尚哉
Naoya YAMAGUCHI
Graduate School of Mathematics, Kyushu University
n-yamaguchi@math.kyushu-u.ac.jp

1 はじめに

有限群の群環上に Capelli 元を与えることにより, その群環の中心の基底を構成した. つまり中心の基底を(非可換)行列式で記述した.

何らかの非可換行列式を定義したいと考えたとき, その値域は考える代数の中心にあるべきで, 実際, Study 行列式 [1] や Dieudonné の行列式 [2] はそうである. 群論における移送もこの考え方に沿ったものであると理解できる [8], [10]. また不変式論において重要な役割を担った Capelli 恒等式 [5] もこの例外ではない. Capelli 恒等式とは行列式の積公式を Weyl 代数上に実現したものである. この恒等式より Capelli 元(固有多項式)が自然に導かれるが, これは一般線型リー環の普遍包絡環の中心の生成元であることが知られている [7].

一方で, 群行列式型 Capelli 恒等式の研究が梅田亨によって提唱された [4], [6]. これは云わば, 有限群の正則表現の Capelli 恒等式である. 正則表現は既約表現の直和(表現の次数分の重複がある)であることから, 有限群の既約表現の Capelli 恒等式が群行列式型 Capelli 恒等式の土台にある.

本稿では, 群の既約表現の Capelli 恒等式を考察することにより群環上に Capelli 元を与え, その Capelli 元が群環の中心の基底を構成することを説明する.

2 群環の中心

まず群環の中心に関して復習をする.

G を有限群, $\widehat{G}$ を G の $\mathbb{C}$ 上の既約表現の同値類の代表元の完全集合, $\mathbb{C}G = \left\{\sum_{g\in G} x_g g \mid x_g \in \mathbb{C}\right\}$ を G の群環, そして $Z(\mathbb{C}G)$ を $\mathbb{C}G$ の中心とする.

既約指標全体は類関数からなる線型空間の基底となるので, 次が成り立つ.

定理 1. χ_φ を $\varphi \in \widehat{G}$ の指標とする．このとき

$$\left\{ \mathrm{Tr}\left(\sum_{g\in G}\varphi(g)g\right) \mid \varphi \in \widehat{G} \right\} = \left\{ \sum_{g\in G}\chi_\varphi(g)g \mid \varphi \in \widehat{G} \right\}$$

は $Z(\mathbb{C}G)$ の基底である（基底といった場合, 本来ならば元の並びを考慮しなければならないが本稿では省略する）．

上の定理は行列の跡を用いて群環の中心の基底を構成している．となれば, 当然以下の疑問が湧き上がる．次の集合

$$\left\{ \det\left(\sum_{g\in G}\varphi(g)g\right) \mid \varphi \in \widehat{G} \right\}$$

は $Z(\mathbb{C}G)$ の基底であるか（むしろ, 基底であるように行列式を定義できるかとも言える）．

本稿の結果は, この疑問に肯定的に答える．つまり我々は, Capelli 元を用いて群環の中心の基底を記述する．

3 主結果

主結果を述べる．

z を変数, $|G|$ を G の位数, $m = \deg\varphi$, $\alpha = \frac{|G|}{m}$, $u_i(z) = \alpha(m-i) - z$, $u^{(i)}(z) = u_m(z)u_{m-1}(z)\cdots u_{m-i+1}(z)$, そして群環上の Capelli 元 $\overline{C}^\varphi(z)$ を

$$\overline{C}^\varphi(z) = \det\left(\sum_{g\in G}\varphi(g)g + \alpha\begin{bmatrix} m-1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix} - zI_m\right) \in \mathbb{C}[z]\otimes\mathbb{C}G.$$

とする．ただし, det は列行列式を表すとする．このとき次の定理が得られる．

定理 2. 以下の等式が成り立つ．

$$\overline{C}^\varphi(z) = u^{(m)}(z) + \mathrm{Tr}\left(\sum_{g\in G}\varphi(g)g\right)u^{(m-1)}(z).$$

よって, 定理 1 と 2 より次の系が得られる．

系 3. $u^{(m-1)}(k_\varphi) \neq 0$ を満たす $k_\varphi \in \mathbb{C}$ を取れば, $\left\{\overline{C}^\varphi(k_\varphi) \mid \varphi \in \widehat{G}\right\}$ は $Z(\mathbb{C}G)$ の基底となる．

主結果の詳細を述べるために, いくつかの準備をする．

4　列行列式と Capelli 恒等式

列行列式と Capelli 恒等式について説明する.

R を結合的代数として, 列行列式を次で定義する.

定義 4 (列行列式). 行列 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le m} \in \mathrm{Mat}(m, R)$ の列行列式を以下で与える.

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_m} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(m)m}.$$

列行列式の例を挙げる.

例 5. 行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, R)$ の列行列式は, $ad - cb$ となる.

Capelli 恒等式は, 行列式の積公式を Weyl 代数上に実現したもので, Weyl 代数とはある関係式を満たす変数と偏微分作用素から生成される代数のことである. 以下にその変数と偏微分作用素, そして関係式を述べる.

x_{ij} $(1 \le i, j \le m)$ を変数, $\partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ $(1 \le i, j \le m)$ を偏微分作用素として, これらが以下の関係式を満たすとする.

$$[x_{ij}, x_{kl}] = 0, \quad [\partial_{ij}, \partial_{kl}] = 0, \quad [\partial_{ij}, x_{kl}] = \alpha\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

ただし, $[a, b] = ab - ba$, $\alpha \in \mathbb{C}$ は i, j, k, l に依存しないある定数, δ は Kronecker のデルタを表すとする. つまり Wely 代数 $\mathbb{C}[x_{ij}, \partial_{kl}; 1 \le i, j, k, l \le m]$ とは, 上の関係式を満たす変数 x_{ij} と偏微分作用素 ∂_{kl} から生成される代数のことである.

次の記号を導入する.

$$X = (x_{ij})_{1\le i,j\le m}, \qquad \partial = (\partial_{ij})_{1\le i,j\le m},$$
$$\Pi = {}^t X \partial, \qquad \natural_m = \mathrm{diag}(m-1, m-2, \ldots, 0).$$

このとき, 以下の恒等式を Capelli 恒等式という.

定理 6 (Capelli 恒等式). 次が成り立つ.

$$\det(\Pi + \alpha\natural_m) = \det X \det \partial.$$

Capelli 恒等式の例を与える.

例 7. $m = 2$, $\alpha = 1$ とすれば, *Capelli* 恒等式は以下である.

$$\det \begin{bmatrix} x_{11}\partial_{11} + x_{21}\partial_{21} + 1 & x_{11}\partial_{12} + x_{21}\partial_{22} \\ x_{12}\partial_{11} + x_{22}\partial_{21} & x_{12}\partial_{12} + x_{22}\partial_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \det \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} \\ \partial_{21} & \partial_{22} \end{bmatrix}$$

Capelli 元について説明する.

z を変数とする. Capelli 元とは Π の固有多項式のことであり, 以下で定義される.

定義 8 (Capelli 元). *Capelli* 元 $C(z)$ を次で与える.

$$C(z) = \det\left(\Pi + \alpha\natural_m - zI_m\right).$$

以下にあるように, Capelli 元は共役不変性を持つ.

定理 9 (共役不変性). 任意の $P \in GL(m, \mathbb{C})$ に対して, 次が成り立つ.

$$\det\left(P\Pi P^{-1} + \alpha\natural_m - zI_m\right) = C(z).$$

Capelli 元は共役不変性以外にも重要な性質を持つ. それは Capelli 元が Π の任意の成分 Π_{ij} (偏極作用素) と可換であるということである. この事実が本稿でも重要な役割を果たす.

定理 10. 任意の $1 \leq i, j \leq m$ に対して, 次が成り立つ

$$[\Pi_{ij}, C(z)] = 0.$$

上の定理は偏極作用素同士の交換関係が

$$[\Pi_{ij}, \Pi_{kl}] = \alpha(\delta_{jk}\Pi_{il} - \delta_{il}\Pi_{kj}).$$

となることより成り立つ.

5 既約表現の Capelli 恒等式

有限群の既約表現の Capelli 恒等式を説明する.

まず Weyl 代数 $\mathbb{C}[x_g, \partial_h]$ を構成する. G を有限群, $x_g\,(g \in G)$ をそれぞれ可換な変数, $\partial_g = \frac{\partial}{\partial x_g}\,(g \in G)$ を偏微分作用素として, これらが任意の $g, h \in G$ に対して以下の関係式を満たすとする.

$$[x_g, x_h] = 0, \quad [\partial_g, \partial_h] = 0, \quad [\partial_g, x_h] = \delta_{gh}.$$

上の変数と偏微分作用素から生成される Weyl 代数を $\mathbb{C}[x_g, \partial_h; g, h \in G]$ と記す. この Weyl 代数の中に, G の既約表現を用いて部分 Weyl 代数を構成して, その部分代数上に Capelli 恒等式を実現する.

φ を G の既約ユニタリ表現の行列表示, $m = \deg\varphi$, そして

$$\alpha_m = \frac{|G|}{m}, \quad X^{\varphi} = \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} x_g, \quad \partial^{\varphi} = \sum_{g \in G} \varphi(g)\partial_g, \quad \Pi^{\varphi} = {}^tX^{\varphi}\partial^{\varphi}$$

とする. このとき, Schur の直交関係より直ちに次の関係式が得られる.

$$[X^{\varphi}_{ij}, X^{\varphi}_{kl}] = 0, \quad [\partial^{\varphi}_{ij}, \partial^{\varphi}_{kl}] = 0, \quad [\partial^{\varphi}_{ij}, X^{\varphi}_{kl}] = \alpha_m \delta_{ik}\delta_{jl}.$$

ゆえに我々は, G の既約表現を用いることにより, Weyl 代数 $\mathbb{C}[x_g, \partial_h]$ の中に部分 Weyl 代数 $\mathbb{C}[X^{\varphi}_{ij}, \partial^{\varphi}_{kl}; 1 \le i,j,k,l \le m]$ を構成することができた. この部分 Weyl 代数は, 直ちに Capelli 型の恒等式を与える.

定理 11 (既約表現の Capelli 恒等式)**.** 次が成り立つ.

$$\det\left(\Pi^{\varphi} + \alpha_m \natural_m\right) = \det X^{\varphi} \det \partial^{\varphi}.$$

今ここで 1 つの疑問が湧く. それは, 上の左辺が表現の行列表示に依存しないのであろうかということである. しかしながらこの疑問は, 定理 9 より, 直ちに解消される. すなわち Capelli 恒等式の共役不変性から, 上の左辺は行列表示に依存しないことがわかる.

$\widehat{G}$ を G の既約表現の同値類の代表元の完全集合として, φ から得た Capelli 元, すなわち Π^{φ} に関する Capelli 元を $C^{\varphi}(z)$ と記すことにする. φ を G の既約ユニタリ表現の行列表示としたが, 上の議論より Capelli 元は行列表示に依らないので, 改めて, $\varphi \in \widehat{G}$ に対して Capelli 元 $C^{\varphi}(z)$ を与えることとする.

6 群環上の Capelli 元

群の既約表現を用いて Capelli 元を群環上に与え, それら Capelli 元が群環の中心の基底を構成することを説明する.

有限群 G の群環 $\mathbb{C}G$ を

$$\mathbb{C}G = \left\{ \sum_{g \in G} x_g g \mid x_g \in \mathbb{C} \right\},$$

既約なユニタリ行列 φ に対して,

$$E^{\varphi} = \sum_{g \in G} \varphi(g) g \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C}G)$$

とする. このとき, Schur の直交関係より次が成り立つ.

補題 12. $\left\{ E^{\varphi}_{ij} \mid \varphi \in \widehat{G}, 1 \le i,j \le \deg\varphi \right\}$ は, 群環 $\mathbb{C}G$ の基底である.

また, 以下の関係式も Schur の直交関係より得られる.

補題 13. 任意の $1 \le i,j,k,l \le \deg\varphi$ と任意の $1 \le s,t \le \deg\psi$ に対して, 次が成り立つ.

$$[E^{\varphi}_{ij}, E^{\varphi}_{kl}] = \alpha_{\deg\varphi}(\delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}), \tag{1}$$

$$[E^{\varphi}_{ij}, E^{\psi}_{st}] = 0 \quad (\varphi \text{ と } \psi \text{ が同値でないとき}). \tag{2}$$

群環上の Capelli 元を定義する.

定義 14 (Capelli 元). $\varphi \in \widehat{G}$ に関する群環上の *Capelli* 元 $\overline{C}^{\varphi}(z)$ を次で与える.

$$\overline{C}^{\varphi}(z) = \det\left(\sum_{g \in G} \varphi(g)g + \alpha_m \natural_m - zI_m\right) \in \mathbb{C}[z] \otimes \mathbb{C}G.$$

上の定義では, φ をユニタリ行列と仮定していないことに注意する. 補題 13 の関係式 (1) より, 上の式の右辺が共役不変性を持つので, この定義は Well-defined である.

また補題 13 の関係式 (1) より, 以下の補題が成り立つ.

補題 15. 任意の $1 \leq i, j \leq m$ に対して, 次が成り立つ.

$$[E_{ij}^{\varphi}, \overline{C}^{\varphi}(z)] = 0.$$

したがって, 補題 13 の関係式 (2) と補題 15 より, 次の事実が直ちに得られる.

補題 16. 任意の $\varphi \in \widehat{G}$ に対して, $\overline{C}^{\varphi}(z) \in Z(\mathbb{C}G)$ が成り立つ.

さらに補題 13 と 16 より, 以下の結果が得られる.

定理 17. $u_i(z) = \alpha_m(m-i) - z$, $u^{(i)}(z) = u_m(z)u_{m-1}(z)\cdots u_{m-i+1}(z)$ とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\overline{C}^{\varphi}(z) = u^{(m)}(z) + \mathrm{Tr}\left(\sum_{g \in G} \varphi(g)g\right) u^{(m-1)}(z).$$

定理 1 と 17 より, 次の系が得られる.

系 18. $u^{(m-1)}(k_\varphi) \neq 0$ を満たす $k_\varphi \in \mathbb{C}$ を取れば, $\left\{\overline{C}^{\varphi}(k_\varphi) \mid \varphi \in \widehat{G}\right\}$ は $Z(\mathbb{C}G)$ の基底となる.

この系は, 2 章で述べた我々の疑問に対する 1 つの答えである.

本稿では列行列式を用いて群環上に Capelli 元を与えた. この Capelli 元を行行列式や 2 重行列式で記述できるかという疑問が残るが, 実際にこれら各々で Capell 元を記述することができる. それは補題 13 の関係式 (1) が成り立つことに注意して, 論文 [3] を参照すれば直ちにわかる.

参考文献

[1] ASLAKSEN, Helmer. Quaternionic determinants. *The Mathematical Intelligencer*, 1996, 18.3: 57–65.

[2] ARTIN, Emil. *Geometric algebra.* Courier Dover Publications, 2016.

[3] ITOH, Minoru; UMEDA, Tôru. On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras. Compositio Mathematica, 2001, 127.03: 333–359.

[4] 梅田　亨, 群行列式型 Capelli 恒等式, preprint.

[5] UMEDA, Tôru. On the proof of the Capelli identities. *Funkcialaj Ekvacioj*, 2008, 51.1: 1–15.

[6] UMEDA, Tôru. Remarks on the Capelli identities for reducible modules, preprint(2016).

[7] 梅田　亨, 跡公式としての Capelli 恒等式, "数理科学" No. 429(1999 年 3 月号), 39–46.

[8] 梅田　亨, 誘導表現の一般化について (On Some Variants of Induced Representations), 表現論シンポジウム講演集 (2012), 7–17.

[9] YAMAGUCHI, Naoya. Capelli elements of the group algebra. *arXiv preprint arXiv:1611.00662*, 2016.

[10] YAMAGUCHI, Naoya. Proof of some properties of transfer using noncommutative determinants. *arXiv preprint arXiv:1602.08667*, 2016.